

Nome: _____ N°: _____

Endereço: _____ Data: _____

Telefone: _____ E-mail: _____



PARA QUEM CURSA A 2ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO EM 2014

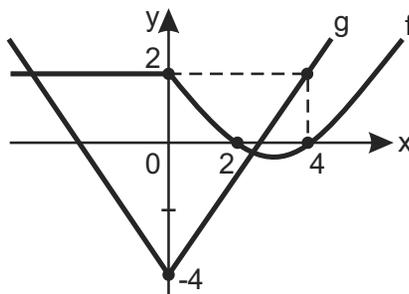
Disciplina:
MATEMÁTICA

Prova:
DESAFIO

NOTA:

QUESTÃO 16

Na figura, temos os gráficos das funções f e g , de \mathbb{R} em \mathbb{R} . O valor de $gof(4) + fog(1)$ é:



- a) 4 b) 3 c) 0 d) - 2 e) - 4

RESOLUÇÃO

Observando os gráficos das funções f e g , temos:

I) $f(4) = 0$

II) $(gof)(4) = g(f(4)) = g(0) = - 4$

III) $g(1) = a$, com $a < 0$

IV) $(fog)(1) = f(g(1)) = f(a) = 2$, pois $a < 0$ e a função f é constante e igual a 2 para todo valor negativo.

Assim, $(gof)(4) + (fog)(1) = - 4 + 2 = - 2$

Resposta: D

QUESTÃO 17

Sabe-se que o número de bactérias num meio, sob certas condições, duplica a cada 10 minutos.

No instante inicial, o número de bactérias era 5000. Qual a expressão que descreve corretamente como varia o número de bactérias, N , em função do tempo, t , em minutos?

a) $N = 5000 \cdot \frac{2t}{10}$

b) $N = 5000 \cdot 2^{\frac{t}{10}}$

c) $N = 5000 + \frac{2t}{10}$

d) $N = 5000 + \frac{2^t}{10}$

e) $N = 5000 \cdot \frac{2^t}{10}$

RESOLUÇÃO

Se o número de bactérias dobra a cada 10 minutos, tem-se:

I) Número inicial de bactérias: 5000

II) Após 10 . 1 minutos: $5000 \cdot 2^1$

III) Após 10 . 2 minutos: $5000 \cdot 2^2$

⋮

Assim, após t minutos, o número de bactérias é dado por $N = 5000 \cdot 2^{\frac{t}{10}}$

Resposta: B

QUESTÃO 18

Para um certo produto, a função de receita é $R = -x^2 + 10,5x$ e a função de custo é $C = x^2 + 0,5x + 1$ (x representa a quantidade do produto).

A função de lucro é definida como a diferença entre a receita e o custo. O lucro máximo possível é (em unidades monetárias):

a) 12

b) 11,5

c) 8,5

d) 10,5

e) 14

RESOLUÇÃO

lucro = receita - custo \Rightarrow lucro = $(-x^2 + 10,5x) - (x^2 + 0,5x + 1) \Rightarrow$ lucro = $-2x^2 + 10x - 1$

Como $a < 0$, a parábola tem concavidade para baixo e o lucro máximo é

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(10^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1))}{4 \cdot (-2)} = 11,5$$

Resposta: B

QUESTÃO 19

No quadrado ABCD, com 6 cm de lado, o valor de z para que a área sombreada seja máxima, será, em centímetros:

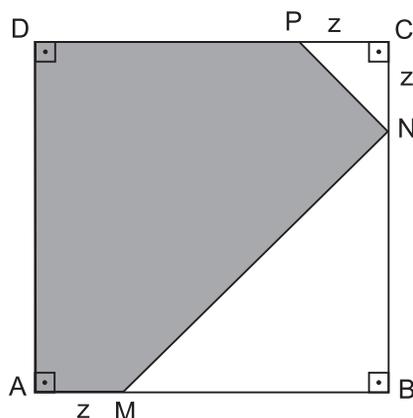
a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5



RESOLUÇÃO

I) Se $AB = BC = 6$, temos: $BM = BN = 6 - z$

II) Sejam: A , a área sombreada;

A_1 , a área do quadrado $ABCD$;

A_2 , a área do triângulo CPN e

A_3 , a área do triângulo BMN , todas em centímetros quadrados, temos:

$$A = A_1 - A_2 - A_3 \Leftrightarrow A = 6^2 - \frac{z \cdot z}{2} - \frac{(6 - z) \cdot (6 - z)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = 36 - \frac{z^2}{2} - \frac{(36 - 12z + z^2)}{2} \Leftrightarrow A = \frac{72 - z^2 - 36 + 12z - z^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{-2z^2 + 12z + 36}{2} \Leftrightarrow A = -z^2 + 6z + 18$$

III) A área será máxima para $z = x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$

Resposta: C

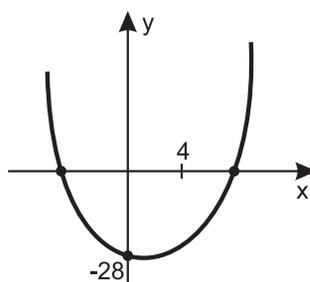
QUESTÃO 20

Na reta real, o número 4 está situado entre as raízes de $f(x) = x^2 + mx - 28$. Nessas condições, os possíveis valores de m são tais que:

- a) $m < -3$ b) $-3 < m < 3$ c) $m > -3$ d) $m > 3$ e) $m < 3$

RESOLUÇÃO

A função $f(x) = x^2 + mx - 28$ tem o gráfico do tipo

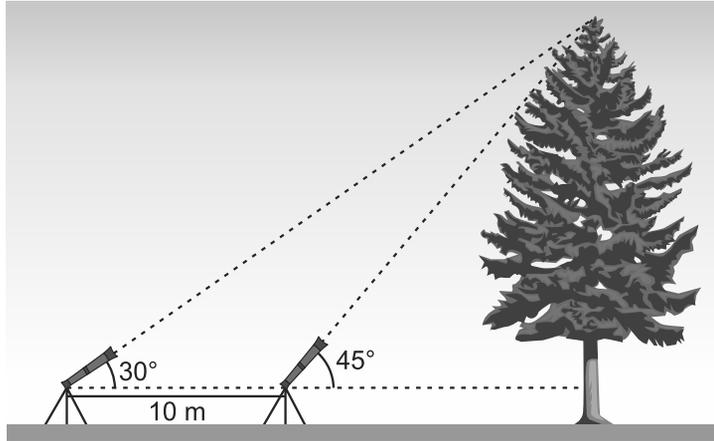


Podemos afirmar que $f(4) < 0 \Rightarrow 4^2 + m \cdot 4 - 28 < 0 \Leftrightarrow 16 + 4m - 28 < 0 \Leftrightarrow 4m < 12 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow m < 3$

Resposta: E

QUESTÃO 21

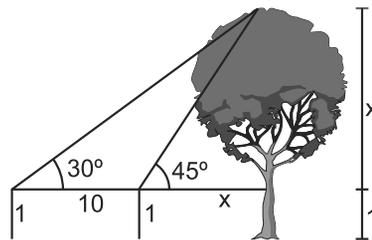
Para medir a altura de uma árvore, da qual não podia aproximar-se, um ambientalista colocou, a certa distância dessa árvore, um cavalete de 1 m de altura e observou seu ponto mais alto, segundo um ângulo de 30° . Aproximando-se mais 10 m, observou o mesmo ponto segundo um ângulo de 45° , conforme a figura a seguir.



Com esse procedimento, o ambientalista obteve como resultado que a altura da árvore era de:

- a) $5\sqrt{3} + 15$ b) $5\sqrt{3} + 5$ c) $5\sqrt{3} + 6$ d) $5\sqrt{3} + 16$ e) $3\sqrt{5} + 6$

RESOLUÇÃO



$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{10 + x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{10 + x} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot (10 + x) = 3x \Rightarrow (3 - \sqrt{3})x = 10\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{3} \cdot (3 + \sqrt{3})}{9 - 3} \Rightarrow x = \frac{30\sqrt{3} + 30}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5\sqrt{3} + 5, \text{ logo a altura da árvore é } 5\sqrt{3} + 6.$$

Resposta: C

QUESTÃO 22

Se (x, y) é a solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{(\sqrt{3})^x}{3} = 3^y \\ \frac{\log(x-1) - \log y}{2} = \log \sqrt{3} \end{cases}$$

o valor de $x + y$ é

a) 5

b) 6

c) 7

d) 8

e) 9

RESOLUÇÃO

$$\begin{cases} \frac{(\sqrt{3})^x}{3} = 3^y \\ \frac{\log(x-1) - \log y}{2} = \log \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = 3^y \cdot 3 \\ \log(x-1) - \log y = 2 \cdot \log \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

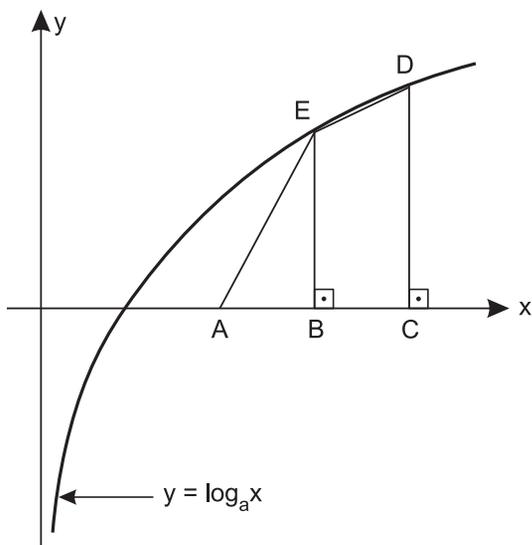
$$\begin{cases} 3^{\frac{x}{2}} = 3^{y+1} \\ \log\left(\frac{x-1}{y}\right) = \log(\sqrt{3})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = y + 1 \\ \frac{x-1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 \\ x = 3y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 \\ 3y + 1 = 2y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x + y = 5$$

Resposta: A

QUESTÃO 23

Os pontos D e E pertencem ao gráfico da função $y = \log_a x$, com $a > 1$ (figura abaixo). Suponha que $B = (x, 0)$, $C = (x + 1, 0)$ e $A = (x - 1, 0)$. Então, o valor de x , para o qual a área do trapézio BCDE é o triplo da área do triângulo ABE, é



a) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

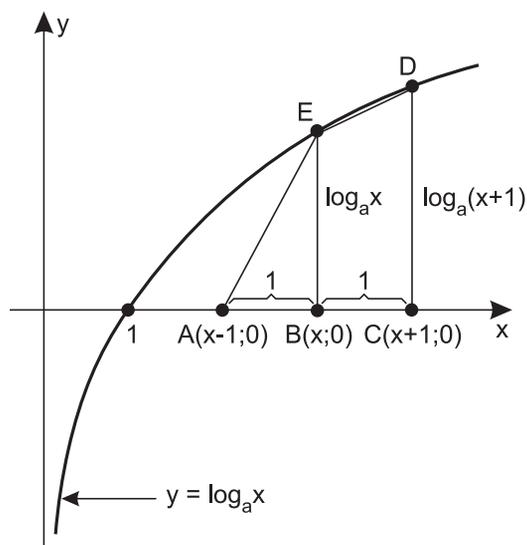
b) $1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\frac{1}{2} + \sqrt{5}$

d) $1 + \sqrt{5}$

e) $\frac{1}{2} + 2\sqrt{5}$

RESOLUÇÃO



$$A_{BCDE} = 3 A_{ABE} \Rightarrow \frac{\log_a x + \log_a(x+1)}{2} \cdot 1 = 3 \cdot \frac{1 \cdot \log_a x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a x(x+1) = \log_a x^3 \Leftrightarrow x^2 + x = x^3 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ pois } x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Observação: Se $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$, então

$x - 1 = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} < 1$. Assim, o ponto A encontra-se à esquerda do ponto de abscissa 1.

Resposta: A

QUESTÃO 24

Todas as permutações com as letras da palavra SORTE foram ordenadas alfabeticamente, como em um dicionário. A última letra da 86ª palavra dessa lista é

- a) S. b) O. c) R. d) T. e) E.

RESOLUÇÃO

Ordenadas alfabeticamente, as permutações da palavra sorte apresentam:

$P_4 = 4! = 24$ que começam por E,

$P_4 = 4! = 24$ que começam por O,

$P_4 = 4! = 24$ que começam por R,

$P_3 = 3! = 6$ que começam por SE,

$P_3 = 3! = 6$ que começam por SO.

Como $24 + 24 + 24 + 6 + 6 = 84$, os próximos anagramas são SREOT e SRETO. Portanto, a última letra da 86ª palavra é a letra O.

Resposta: B

QUESTÃO 25

O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO, que não apresentam as cinco vogais juntas, é:

- a) 12 b) $(8!)(5!)$ c) $12! - (8!)(5!)$
d) $12! - 8!$ e) $12! - (7!)(5!)$

RESOLUÇÃO

VESTIBULANDO tem 12 letras distintas e portanto

$P_{12} = 12!$ anagramas.

As vogais aparecem juntas em $P_8 \cdot P_5 = (8!) \cdot (5!)$ anagramas

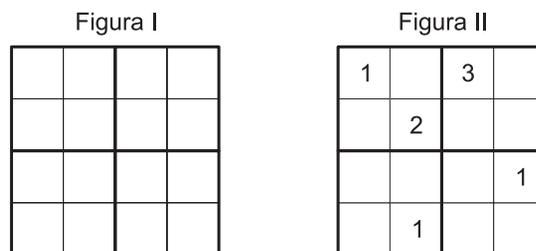
E I U A O V S T B L N D

Logo, existem $12! - (8!) (5!)$ anagramas nos quais as vogais não estão todas juntas.

Resposta: C

QUESTÃO 26

Uma urna contém todas as cartelas, do tipo da figura I, totalmente preenchidas com os algarismos 1, 2, 3 e 4, de forma que cada linha (horizontal) contempla todos os quatro algarismos.



A probabilidade de se retirar dessa urna, aleatoriamente, uma cartela contemplando a configuração da figura II, com a exigência adicional de que cada coluna (vertical) e cada um dos subquadrados destacados contêm todos os algarismos (1, 2, 3 e 4) é:

- a) $\frac{1}{12 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}$ b) $\frac{1}{16 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}$ c) $\frac{1}{18 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}$
- d) $\frac{1}{20 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}$ e) $\frac{1}{4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!}$

RESOLUÇÃO

Para cada uma das linhas da figura I existem P_4 possibilidades. Para as quatro linhas existem $P_4 \cdot P_4 \cdot P_4 \cdot P_4$ possibilidades. Observe que nesse total não se respeitou qualquer condição de coluna ou subquadrados.

Respeitando as condições das colunas e dos subquadrados contemplarem os quatro algarismos, o quadrado da figura II pode ser preenchido de P_2 formas diferentes, pois com os números dados todos os algarismos apresentados na figura abaixo estão fixados.:

1	4	3	2
3	2	1	4
	3		1
	1		3

Desta forma, a probabilidade é

$$\frac{P_2}{P_4 \cdot P_4 \cdot P_4 \cdot P_4} = \frac{2!}{4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!} = \frac{1}{12 \cdot 4! \cdot 4!}$$

Resposta: A

QUESTÃO 27

O preço de um objeto, em reais, é escolhido, aleatoriamente, entre os elementos do conjunto

$$\{13,00; 13,01; 13,02; 13,03; \dots; 43,99\}.$$

A probabilidade de que o preço de tal objeto seja x reais e x centavos é:

- a) 0,6% b) 1% c) 1,6% d) 3,2% e) 31%

RESOLUÇÃO

I) No conjunto de preços $\{13,00; 13,01; 13,02; \dots; 43,99\}$, existem $4399 - 1299 = 3100$ elementos.

II) Os preços do tipo x reais e x centavos formam o conjunto $\{13,13; 14,14; 15,15; \dots; 43,43\}$, num total de $43 - 12 = 31$ elementos.

III) A probabilidade pedida é $\frac{31}{3100} = \frac{1}{100} = 1\%$

Resposta: B

QUESTÃO 28

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

e seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \det A$. Então $f(-1)$ é:

- a) -3 b) 3 c) -9 d) 7 e) -7

RESOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \text{I) } f(x) = \det A &= \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} = x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} = \\ &= x \cdot 1 \cdot x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 8 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = x \cdot 1 \cdot x \cdot 1 \cdot (x^3 + 8) = x^2 \cdot (x^3 + 8) \end{aligned}$$

$$\text{II) } f(x) = x^2 \cdot (x^3 + 8) \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 \cdot [(-1)^3 + 8] = 1 \cdot (-1 + 8) = 7$$

Resposta: D

QUESTÃO 29

$$\text{O sistema } \begin{cases} x + 2y = 6 \\ (a + 1)x + ay = 4a + 2 \end{cases}$$

- a) admite solução única para $a = -2$.
- b) admite infinitas soluções para $a \neq -2$.
- c) não admite solução para $a = -2$.
- d) admite solução única, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.
- e) admite solução, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ (a + 1)x + ay = 4a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 6 \\ -(a + 2) \cdot y = -2a - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 6 \\ (a + 2) \cdot y = 2 \cdot (a + 2) \end{cases}$$

Para $a \neq -2$, o sistema é possível e determinado; e para $a = -2$, o sistema é possível e indeterminado. Logo, o sistema admite solução, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$.

Resposta: E

QUESTÃO 30

$$\text{Sejam as matrizes } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A equação $\det(A - xB) = 0$, com $x \in \mathbb{R}$, admite

- a) uma raiz de multiplicidade 2.
- b) uma raiz negativa.
- c) duas raízes negativas.
- d) uma raiz positiva e outra negativa.
- e) uma raiz nula.

RESOLUÇÃO

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ então:}$$

$$\text{I) } A - x \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-x & 2 \\ 2 & 1-x \end{bmatrix}$$

$$\text{II) } \det(A - xB) = 0 \Rightarrow (4 - x) \cdot (1 - x) - 4 = 0 \Leftrightarrow 4 - 4x - x + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 5$$

Resposta: E