Nome: ______________________________ Nº: ________

Endereço: ______________________________ Data: ________

Telefone: ______________ *E-mail:* ______________________________

Colégio OBJETIVO

PARA QUEM CURSA O 8º ANO EM 2014

Disciplina:	Prova:	NOTA:
MATEMÁTICA	**DESAFIO**	

QUESTÃO 16

(OBEMEP- ADAPTADO) – Laura e sua avó Ana acabaram de descobrir que, no ano passado, suas idades eram divisíveis por 8 e, no próximo ano serão divisíveis por 7. Vovó Ana ainda não é centenária. Qual a idade atual de Laura?

a) 38 anos b) 40 anos c) 41 anos d) 49 anos e) 54 anos

RESOLUÇÃO

No próximo ano Laura será 2 anos mais velha do que no ano passado. Logo sua idade no ano passado é um múltiplo de 8 que somado a 2 dá um múltiplo de 7. Vamos procurar esse número.

Múltiplos de 7: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98

(Múltiplos de 7) – 2: 5, 12, 19, 26, 33, $\boxed{40}$, 47, 54, 61, 68, 75, 82, 89, $\boxed{96}$

Múltiplos de 8: 8, 16, 24, 32, $\boxed{40}$, 48, 56, 64, 72, 80, 88, $\boxed{96}$

Note que 40 e 96 são os únicos múltiplos de 8, menores que 100 anos, que somados 2 resultam em múltiplos de 7 (42 e 98 respectivamente). Podemos concluir que no ano passado ela tinha 96 anos e Laura 40. Logo a idade atual de Laura é 41 anos.
Resposta: C

QUESTÃO 17

A soma de quatro números é 100. Três deles são primos e um dos quatro é a soma dos outros três. O número de soluções existentes para este problema é

a) 3. b) 4. c) 2. d) 5. e) 6.

RESOLUÇÃO

Dadas as afirmações do problema, segue:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 100 \\ a + b + c = d \end{cases} \Rightarrow 2d = 100 \Rightarrow d = 50$$

Como d = 50 não é primo, os números a, b e c são primos, e

$$a + b + c = 50$$

o que só é verdadeiro se um dos termos for par. Sendo assim, c = 2 e a + b = 48, a e b sendo números ímpares e primos. Vamos supor, sem perdas de generalidade, que a < b.

Então as possibilidades para a e b são:

a	b
5	**43**
7	**41**
11	**37**
17	**31**
19	**29**

Resposta: D

QUESTÃO 18

Qual o valor de $a^2 + \dfrac{1}{a^2}$, sabendo que $a + \dfrac{1}{a} = 5$.

a) 21 b) 22 c) 23 d) 24 e) 25

RESOLUÇÃO

Se $a + \dfrac{1}{a} = 5$ **então** $\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow a^2 + 2 \,.\, a \,.\, \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} = 25 \Leftrightarrow a^2 + \dfrac{1}{a^2} = 23$

Resposta: C

QUESTÃO 19

No meio da madrugada Joãozinho acordou com a festinha dos gatos dos vizinhos no seu quintal. Após uma contagem demorada, ele verificou que havia mais que 23 gatos e que exatamente 95% deles eram pardos. O número mínimo de gatos presentes nessa ocasião foi:

a) 36 b) 40 c) 48 d) 50 e) 60

RESOLUÇÃO

Observe que 95% $= \dfrac{95}{100} = \dfrac{19}{20} = \dfrac{38}{40} = \ldots$

Se existissem 20 gatos, 19 seriam pardos,
Se existissem 40 gatos, 38 seriam pardos,
Se existissem 60 gatos, 57 seriam pardos.
Assim, para existirem mais que 23 gatos, a quantidade mínima de gastos é 40.

Resposta: B

QUESTÃO 20

(FGV) – Em uma urna há 72 bolas idênticas mas com cores diferentes. Há bolas brancas, vermelhas e pretas. Ao sortearmos uma bola da urna, a probabilidade de ela ser branca é 1/4 e a probabilidade de ela ser vermelha é 1/3.

A diferença entre o número de bolas pretas e o número de bolas brancas na urna é

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

Resolução

Se *b, v* e *p* forem o número de bolas brancas, vermelhas e pretas, respectivamente, então:

$$\begin{cases} \dfrac{b}{72} = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{v}{72} = \dfrac{1}{3} \\ b + v + p = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 18 \\ v = 24 \\ p = 30 \end{cases}$$

Assim, p – b = 30 – 18 = 12

Resposta: E

QUESTÃO 21

Segundo um livro de quebra-cabeças publicado na Idade Média, a estátua da deusa Palas Atena trazia a seguinte inscrição:

"Eu, Palas, sou feita do ouro mais puro, doado por cinco generosos poetas. Cariseu deu a metade; Téspio deu um oitavo. Sólon deu um décimo. Temiso deu um vinte avos. E os nove talentos de ouro restantes foram doados pelo bom Aristódoco."

Quantos talentos de ouro tem a estátua no total? (Um talento é uma unidade de peso, aproximadamente igual a 1 kg).

a) Exatamente 20 b) Entre 20 e 30 c) Exatamente 30
d) Entre 30 e 40 e) Exatamente 40

RESOLUÇÃO

A soma das quatro frações citadas é igual a:

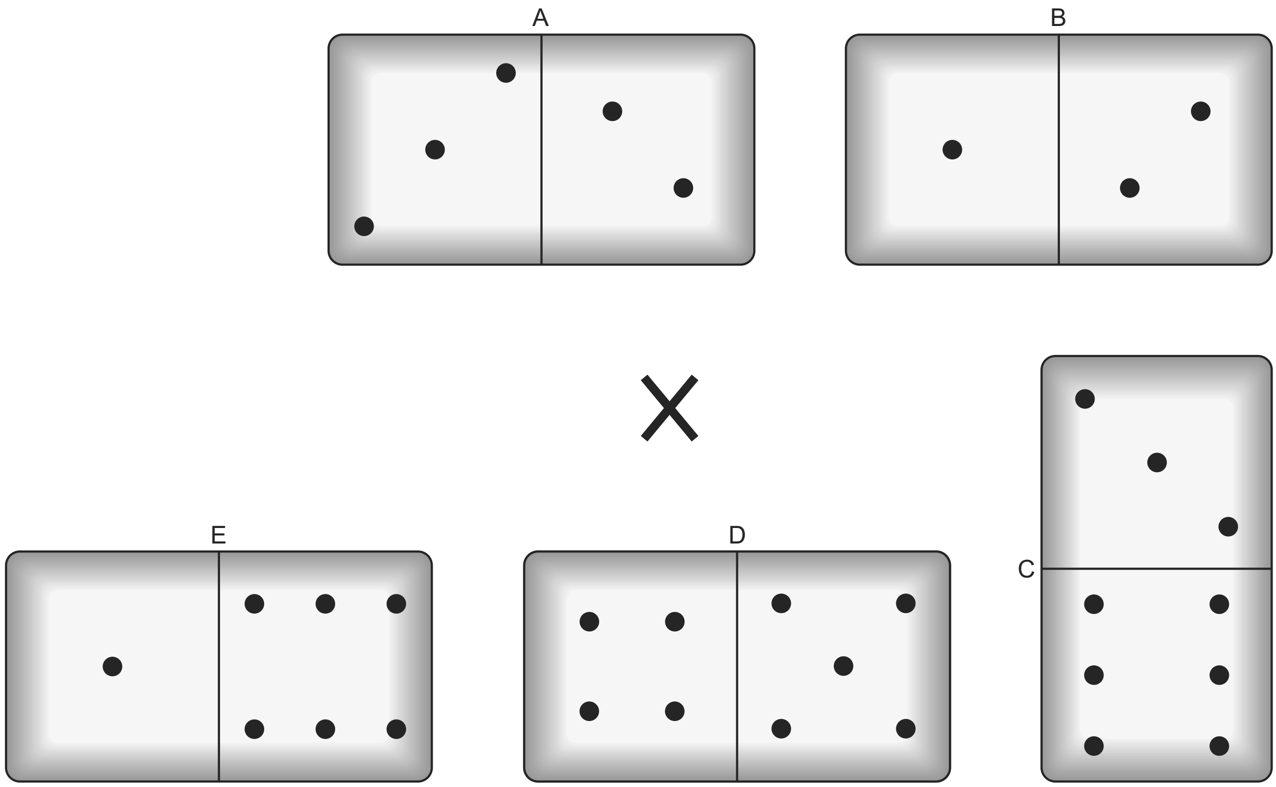
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{20 + 5 + 4 + 2}{40} = \frac{31}{40}$$

Para completar a estátua faltam $\dfrac{9}{40}$ que corresponde aos 9 talentos doados por Aristódoco. Assim, a estátua tem 40 talentos.

Resposta: E

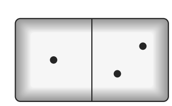
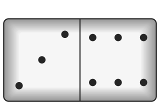
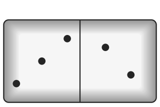
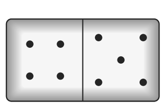
QUESTÃO 22

(OBEMEP) – Juliana representa uma multiplicação com 5 dominós. Seu irmão Bruno trocou dois dominós de posição e agora a multiplicação ficou errada. A figura seguinte representa a multiplicação 3212 X 3 = 16456 errada. Quais dominós devem ser trocados, para que a multiplicação de Juliana fique correta?

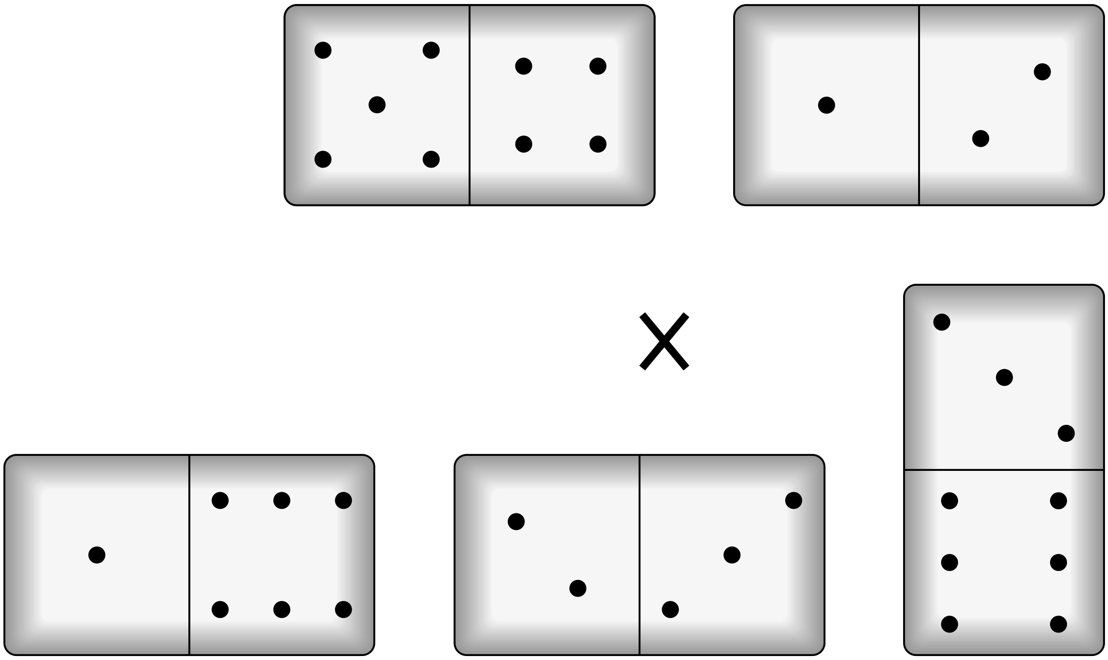


a) B e D b) C e E c) A e C d) B e E e) A e D

RESOLUÇÃO

Dado que 2 . 3 = 6, vamos supor por enquanto que os dominós  **e**  **estão na posição certa. Caso isso seja verdade, dado que 1 . 3 = 3 temos que o algarismo na dezena do resultado é três, logo temos que trocar o dominó**  **pelo dominó** **, de tal forma que o 3 fique na dezena. Desta forma teremos um 2 na centena do resultado, então na centena do primeiro número temos que ter um 4.**

Assim, o produto certo fica da forma



$$\begin{array}{r} 5412 \\ \times\ 3 \\ \hline 16236 \end{array}$$

Resposta: E

QUESTÃO 23

No último dia 12 de junho, a seleção brasileira de futebol jogou contra a Croácia, na cidade de São Paulo, em partida inaugural da Copa do Mundo de 2014. A próxima partida da seleção brasileira está prevista para o dia 17 de junho, em Fortaleza, no Ceará.

Num mapa, na escala de 1 :25 000 000, a distância aproximada (em linha reta) entre São Paulo e Fortaleza é de 10 cm.

Um torcedor da seleção brasileira, que assistiu à partida do Brasil em São Paulo, pretende também assistir ao outro jogo dessa equipe em Fortaleza. A distância, em linha reta, que ele terá de percorrer entre as cidades de São Paulo e Fortaleza será, em quilômetros, de

a) 5000. b) 2500. c) 1 000. d) 500. e) 250.

RESOLUÇÃO

A distância, em linha reta, que ele terá que percorrer será:

25 000 000 . 10 cm = 250 000 000 cm = 2 500 km

Resposta: B

QUESTÃO 24

O valor de:

$$\frac{x^4 - y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}, \text{ para } x = 111 \text{ e } y = 112 \text{ é:}$$

a) 223 b) 215 c) 214 d) 1 e) – 1

RESOLUÇÃO

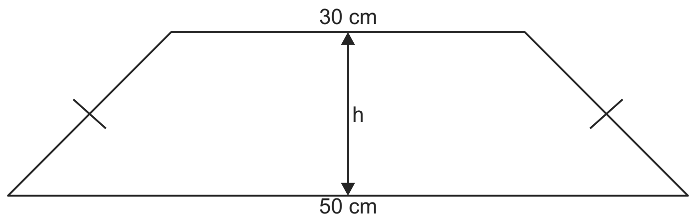
Com $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 \neq 0$, temos:

$$\frac{x^4 - y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3} = \frac{(x^2 + y^2)\,(x^2 - y^2)}{x^2(x - y) + y^2\,(x - y)} = \frac{\cancel{(x^2 + y^2)}\,(x + y)\,\cancel{(x - y)}}{\cancel{(x - y)}\,\cancel{(x^2 + y^2)}} = x + y$$

Para x = 111 e y = 112, o valor da expressão x + y = 111 + 112 = 223.
Resposta: A

QUESTÃO 25

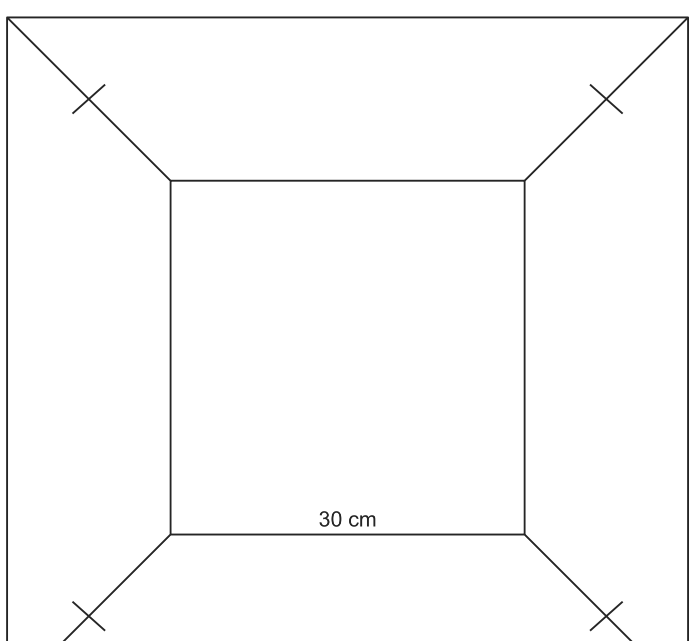
Unindo quatro trapézios iguais de bases 30 cm e 50 cm e lados não paralelos também iguais, como o da figura, podemos formar um quadrado de área 2500 cm^2, com um "buraco" quadrado no meio. Qual é a área de cada trapézio em cm^2 e a altura de cada um em centímetros.



a) 200 e 20 b) 250 e 25 c) 300 d) 400 e 10 e) 450 e 5

RESOLUÇÃO

Unindo os quatro trapézios, formamos um quadrado de lado 50 cm e, portanto, de área 2500 cm^2.



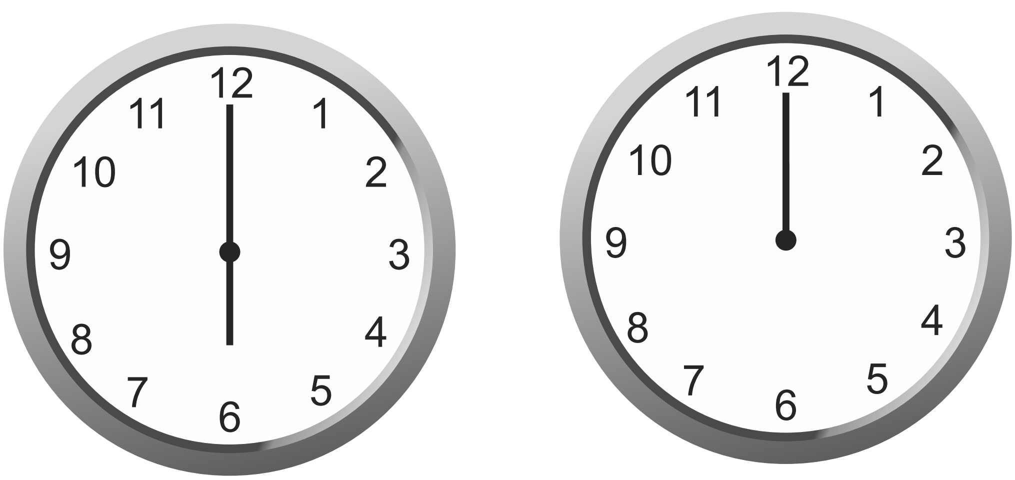
Como o "buraco" quadrado têm lado de 30 cm, sua área é de 30 cm x 30 cm = 900 cm^2.
Logo a área de cada um dos trapézios é igual a:
(2500 – 900) cm^2: 4 = 1600 cm^2 : 4 = 400 cm^2

$$A_{trapézio} = \frac{(50 + 30) . h}{2} = 400 \Leftrightarrow 40\,h = 400 \Leftrightarrow \boxed{h = 10}$$

Resposta: D

QUESTÃO 26

Todo relógio analógico tem pelo menos dois ponteiros: um para mostrar a hora e outro mais comprido para mostrar o minuto. Joãozinho percebeu que esses ponteiros às vezes ficam alinhados, opostos ou então sobrepostos, como na figura.



Quantas vezes isto acontece entre as 7 horas da manhã de um dia até as 7 horas da manhã do dia seguinte?

a) 40
b) 44
c) 45
d) 46
e) 47

RESOLUÇÃO

Vamos contar o número de ocorrências em que ficam alinhados, opostos ou então sobrepostos, analisando o que acontece de hora em hora. Vamos olhar os intervalos de tempo a ⊣ b, que significa "depois de *a* e até *b*, inclusive *b*".

Intervalos de 1 h	Número de ocorrências
7 ⊣ 8	2
8 ⊣ 9	2
9 ⊣ 10	2
10 ⊣ 11	2
11 ⊣ 12	2
12 ⊣ 1	1

Intervalos de 1 h	Número de ocorrências
1 ⊣ 2	2
2 ⊣ 3	2
3 ⊣ 4	2
4 ⊣ 5	2
5 ⊣ 6	2
6 ⊣ 7	1

Percebemos que das 7h da manhã às 7h da noite há 22 ocorrências. Logo, das 7h da noite às 7h da manhã do dia seguinte há mais 22 ocorrências. Ou seja, ficam alinhados, opostos ou então sobrepostos, 22 + 22 = 44 vezes.
Resposta: B

QUESTÃO 27

(INSPER-2014) – Carlos deseja sacar num caixa eletrônico uma quantia entre R$ 51,00 e R$ 99,00. O caixa dispõe de notas de R$ 5,00, R$ 10,00 e R$ 20,00, e sempre fornece o menor número de cédulas que compõe o valor solicitado. Dentre os valores que Carlos está disposto a sacar, apenas alguns serão feitos com exatamente 5 cédulas. A soma desses valores é

a) R$ 75,00.
b) R$ 160,00.
c) R$ 250,00.
d) R$ 300,00.
e) R$ 350,00.

RESOLUÇÃO

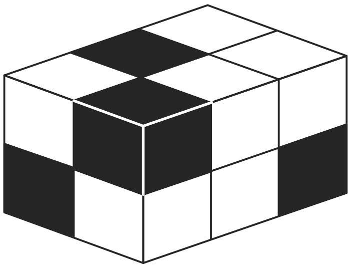
Se Carlos retira valores em notas de R$ 5,00, R$ 10,00 e R$ 20,00, o valor retirado é sempre múltiplo de R$ 5,00. A tabela a seguir mostra, em reais, como o caixa eletrônico fornece os múltiplos de R$ 5,00 compreendidos entre R$ 51,00 e R$ 99,00, lembrando que o caixa sempre fornece a menor quantidade de notas

Valor solicitado	O caixa fornece	Quantidade de notas
55,00	2 notas de 20,00, 1 nota de 10,00 e 1 de 5,00	4
60,00	3 notas de 20,00	3
65,00	3 notas de 20,00 e 1 nota de 5,00	4
70,00	3 notas de 20,00 e 1 nota de 10,00	4
75,00	3 notas de 20,00, 1 nota de 10,00 e 1 nota de 5,00	5
80,00	4 notas de 20,00	4
85,00	4 notas de 20,00 e 1 nota de 5,00	5
90,00	4 notas de 20,00 e 1 nota de 10,00	5
95,00	4 notas de 20,00, 1 nota de 10,00 e 1 nota de 5,00	6

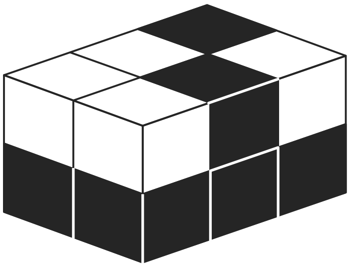
Com exatamente *cinco* notas Carlos pode retirar R$ 75,00, R$ 85,00 ou R$ 90,00, valores cuja soma é R$ 250,00.
Resposta: C

QUESTÃO 28

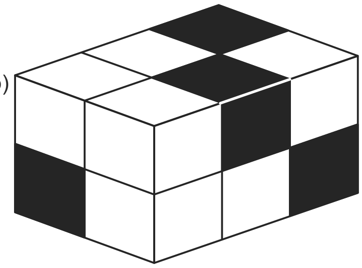
(OBM-2014) – A figura à direita mostra um bloco retangular montado com seis cubinhos pretos e seis cubinhos brancos, todos de mesmo tamanho. Qual das figuras abaixo mostra o mesmo bloco visto por trás?



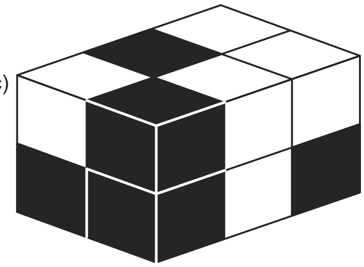
a)



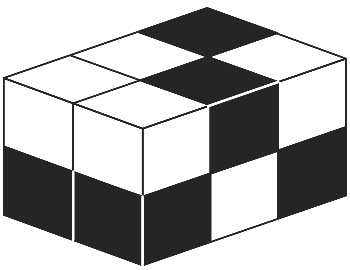
b)



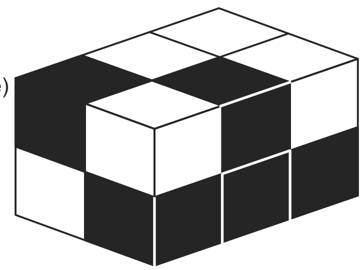
c)



d)



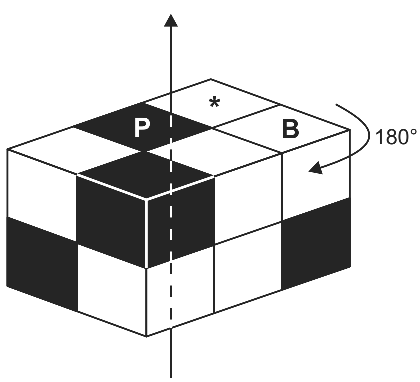
e)



RESOLUÇÃO

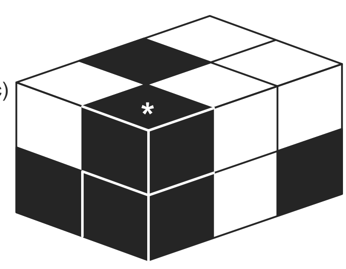
Para enxergarmos o bloco por traz devemos imaginá-lo girando 180° em torno de seu eixo vertical.

a) Inicialmente, vamos olhar para o cubinho branco marcado com um * na figura na posição inicial.

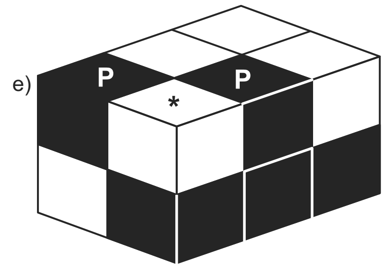


Isso nos permite excluir a alternativa (C), pois esse cubinho é preto nessa figura.

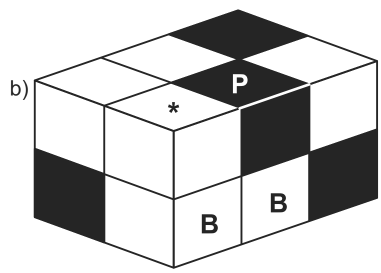
c)

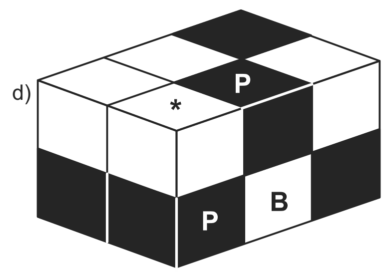


E veja que os vizinhos na face superior do cubinho marcado com * são um branco e um preto. Com isso vamos excluir agora a alternativa (E), onde o bloco marcado com * está entre dois blocos pretos.



e) Note que na figura inicial podemos ver dez cubinhos, sendo seis branco e quatro pretos. Portanto, os únicos dois que não vemos são pretos e eles estão embaixo dos cubinhos marcados com * e P na figura inicial. Podemos, portanto, excluir as alternativas (B) e (D).





A figura que mostra o bloco visto por trás é mostrada na alternativa (A).
Resposta: A

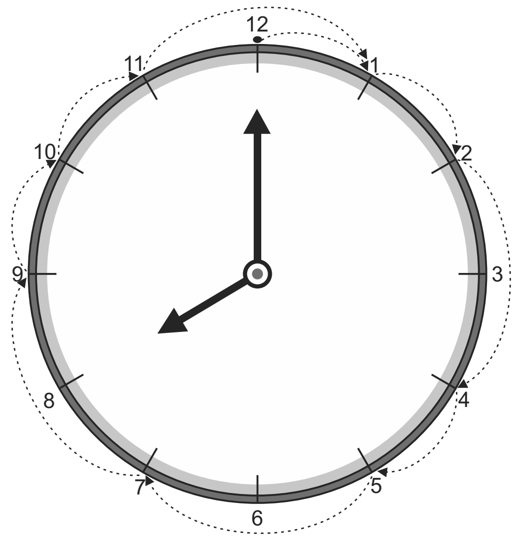
QUESTÃO 29

(FGV-2014) – Uma pulga com algum conhecimento matemático brinca, pulando sobre as doze marcas correspondentes aos números das horas de um relógio. Quando ela está sobre uma marca correspondente a um número não primo, ela pula para a primeira marca a seguir, no sentido horário. Quando ela está sobre a marca de um número primo, ela pula para a segunda marca a seguir, sempre no sentido horário.

Se a pulga começa na marca do número 12, em que número estará após o 2014º pulo?

a) 3 b) 5 c) 6 d) 9 e) 11

RESOLUÇÃO



Entre os números do marcador do relógio, são primos os números 2, 3, 5, 7 e 11
Começando no número 12, a pulga anda:
$12 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 7 \to 9 \to 10 \to 11 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 7 \to 9 \to 10 \to 11 \to 1 \ldots$
Observe que no primeiro pulo ela vai do 12 para o 1 e não retorna mais ao número 12. A cada 8 pulos, ela retorna ao número 1. Descontado o pulo inicial, restam 2013 pulos. Como 2013 = 251 x 8 + 5, basta ver onde ela estará 5 pulos após o 1. Neste caso, no número 9.
Resposta: D

QUESTÃO 30

(OBEMEP-adaptado) – Quantas frações irredutíveis menores do que 1 existem, tais que, o numerador e o denominador são números naturais de um algarismo?

a) 36 b) 30 c) 28 d) 27 e) 25

RESOLUÇÃO

Para que uma fração seja menor do que 1, o numerador tem que ser menor do que o denominador. As frações são:
Com denominador 1: não tem nenhuma.

Com denominador 2, só existe a fração: $\frac{1}{2}$.

Com denominador 3 existem as frações: $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

Com denominador 4 existem as frações: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$.

Porém $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, já contada.

Com denominador 5 existem as frações: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$.

Com denominador 6 existem as frações: $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{5}{6}$.

Porém $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, já contada.

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, já contada.

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, já contada.

Com denominador 7 existem as frações: $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ e $\frac{6}{7}$.

Com denominador 8 existem as frações: $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{8}$ e $\frac{7}{8}$.

Porém $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, já contadas.

$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, já contadas.

$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, já contadas.

Com denominador 9 existem as frações: $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{7}{9}$ e $\frac{8}{9}$.

Porém $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, já contadas.

$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, já contadas.

Assim as frações procuradas são: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$,

$\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$,

$\frac{7}{9}$ e $\frac{8}{9}$ no total de 27 frações.

Resposta: D