Nome: ______________________________ N.º: ________

Endereço: ______________________________ Data: ________

Telefone: ______________ *E-mail:* ______________________

Colégio OBJETIVO

PARA QUEM CURSA O 1.º ANO DO ENSINO MÉDIO EM 2018

Disciplina: MATEMÁTICA	Prova: DESAFIO	NOTA:

QUESTÃO 16

Simplificando-se a expressão $\dfrac{\sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}}}{\sqrt{\dfrac{1}{y}} - \sqrt{\dfrac{1}{x}}}$, obtém-se:

a) $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy}$

b) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

c) $\dfrac{xy}{x + y}$

d) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$

e) $x - y$

Observações: $x > 0$, $y > 0$ e $x \neq y$.

RESOLUÇÃO

$$\frac{\sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}}}{\sqrt{\frac{1}{y}} - \sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{x - y}{\sqrt{x} \,.\, \sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} \,.\, \sqrt{y}}} = \frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} =$$

$$= \frac{(x - y) \,.\, (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2} = \frac{(x - y) \,.\, (\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(x - y)} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Resposta: D

QUESTÃO 17

O valor da expressão $\dfrac{\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a+\sqrt{a}}\,.\,\sqrt{a-\sqrt{a}}\,.\,\sqrt{a+1}}{\sqrt{a^2-1}}$, sendo a > 0 e a ≠ 1, é:

a) $\sqrt{a+1}$
b) a
c) a – 1
d) a + 1
e) $\sqrt{a-1}$

RESOLUÇÃO

$$\frac{\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a+\sqrt{a}}\,.\,\sqrt{a-\sqrt{a}}\,.\,\sqrt{a+1}}{\sqrt{a^2-1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a^2-a}\,.\,\sqrt{a+1}}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a}\,.\,\sqrt{a-1}\,.\,\sqrt{a+1}}{\sqrt{a^2-1}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2}\,.\,\sqrt{a^2-1}}{\sqrt{a^2-1}} = \sqrt{a^2} = a$$

Resposta: B

QUESTÃO 18

Se $\dfrac{1}{x^3 + x + 1} = \dfrac{27}{37}$, então $\dfrac{1}{x^3 + x + 2}$ é igual a

a) $\dfrac{27}{84}$

b) $\dfrac{27}{64}$

c) $\dfrac{27}{38}$

d) $\dfrac{28}{37}$

e) $\dfrac{64}{27}$

RESOLUÇÃO

$$\frac{1}{x^3 + x + 1} = \frac{27}{37} \Leftrightarrow x^3 + x + 1 = \frac{37}{27} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^3 + x + 1) + 1 = \frac{37}{27} + 1 \Leftrightarrow x^3 + x + 2 = \frac{64}{27} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^3 + x + 2} = \frac{27}{64}$$

Resposta: B

QUESTÃO 19

Para dar R$ 1,80 de troco a um cliente, o caixa de um supermercado pretende usar exatamente 20 moedas. Se ele dispõe apenas de moedas de 5 centavos, 10 centavos e 25 centavos, de quantos modos distintos ele pode compor tal quantia?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

RESOLUÇÃO

Sendo x, y e z as quantidades de moedas de R$ 0,05, R$ 0,10 e R$ 0,25, respectivamente, tem-se $0{,}05x + 0{,}10y + 0{,}25z = 1{,}80$, com x, y e z $\in \mathbb{N}$.

Assim:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 36 \\ x + y + z = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 20 \\ y + 4z = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 3z \\ y = 16 - 4z \end{cases}$$

Como $y \in \mathbb{N}$, devemos ter $16 - 4z \geq 0 \Rightarrow z \leq 4$.
Desta forma, as soluções do sistema são (4; 16; 0), (7; 12; 1), (10; 8; 2), (13; 4; 3) e (16; 0; 4).
Portanto, existem 5 modos distintos de compor R$ 1,80 com moedas de R$ 0,05, R$ 0,10 e R$ 0,25, usando exatamente 20 moedas.
Resposta: C

QUESTÃO 20

Um comerciante pagou uma dívida de R$ 8000,00 em dinheiro, usando apenas notas de R$ 50,00 e R$ 100,00. Se um terço do total das notas foi de R$ 100,00, a quantidade de notas de R$ 50,00 utilizadas no pagamento foi

a) 60
b) 70
c) 80
d) 90
e) 100

RESOLUÇÃO

Sejam respectivamente *q* e *c* a quantidade de notas de R$ 50,00 e R$ 100,00 utilizadas pelo comerciante. Nas condições dadas, em reais, tem-se:

$$\begin{cases} 50q + 100c = 8000 \\ c = \dfrac{1}{3} \cdot (q + c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q + 2c = 160 \\ q = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 40 \\ q = 80 \end{cases}$$

Assim, foram utilizadas 80 notas de R$ 50,00.
Resposta: C

QUESTÃO 21

Numa determinada empresa, vigora a seguinte regra, baseada em acúmulo de pontos. No final de cada mês, o funcionário recebe 3 pontos positivos, se em todos os dias do mês ele foi pontual no trabalho, ou 5 pontos negativos, se durante o mês ele chegou pelo menos um dia atrasado. Os pontos recebidos vão sendo acumulados mês a mês, até que a soma atinja, pela primeira vez, 50 ou mais pontos, positivos ou negativos. Quando isso ocorre, há duas possibilidades: se o número de pontos acumulados for positivo, o funcionário recebe uma gratificação e, se for negativo, há um desconto em seu salário. Se um funcionário acumulou exatamente 50 pontos positivos em 30 meses, a quantidade de meses em que ele foi pontual, no período, foi:

a) 15
b) 20
c) 25
d) 26
e) 28

RESOLUÇÃO

Seja x o número de meses com pontuação positiva e y o número de meses com pontuação negativa.

A partir do enunciado, temos:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 3x - 5y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 150 \text{ (I)} \\ 3x - 5y = 50 \text{ (II)} \end{cases}$$

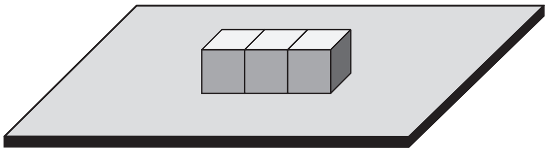
De (I) e (II), resulta: $8x = 200 \Leftrightarrow x = 25$.

Portanto, a quantidade de meses em que ele foi pontual (acumulou pontos positivos) foi igual a 25.

Resposta: C

QUESTÃO 22

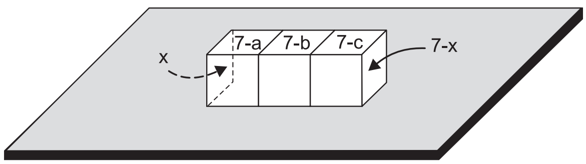
Em um dado comum, a soma dos números de pontos desenhados em quaisquer duas faces opostas é sempre igual a 7. Três dados comuns e idênticos são colados por faces com o mesmo número de pontos. Em seguida, os dados são colados sobre uma mesa não transparente, como mostra a figura.



Sabendo-se que a soma dos números de pontos de todas as faces livres é igual a 36, a soma dos números de pontos das três faces que estão em contato com a mesa é igual a

a) 13
b) 14
c) 15
d) 16
e) 18

RESOLUÇÃO



Sejam:

a) a, b e c os números marcados nas faces que estão em contato com a mesa.

b) 7 – a, 7 – b, 7 – c os números marcados nas faces superiores dos três dados.

c) x o número da face lateral esquerda do dado da esquerda e 7 – x o número da face lateral direita do primeiro dado, que é também o da face lateral esquerda do 2º dado.

d) x, analogamente, é o número da face lateral comum do 2º e do 3º dado.

e) 7 – x é o número da face lateral direita do terceiro dado.

f) 7 + 7 + 7 = 21 é a soma dos números das três faces da frente com as três faces de trás.

Assim:

$$(x + 7 - x) + 7 + 7 + 7 + (7 - a) + (7 - b) + (7 - c) = 36 \Leftrightarrow 7 + 21 + 21 - (a + b + c) = 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 49 - 36 \Leftrightarrow a + b + c = 13$$

Resposta: A

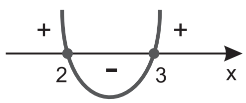
QUESTÃO 23

Se $Q = x^2 - 5x + 6 < 0$ e $P = x^2 + 5x + 6$, então, no intervalo considerado para Q:

a) P pode apresentar qualquer valor real.
b) $20 < P < 30$
c) $0 < P < 20$
d) $P < 0$
e) $P > 30$

RESOLUÇÃO

I) $x^2 - 5x + 6 < 0$, as raízes são 2 e 3 e o gráfico é do tipo

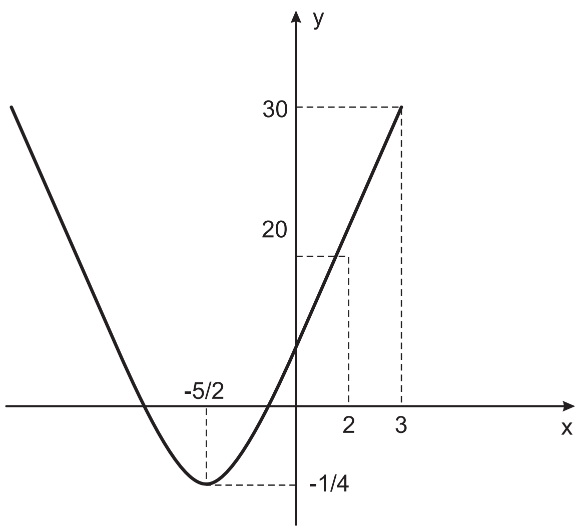


Logo, $2 < x < 3$.

II) Como $P = x^2 + 5x + 6$, temos:

$$\begin{cases} P(2) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 6 = 20 \\ P(3) = 3^2 + 5 \cdot 3 + 6 = 30 \end{cases}$$

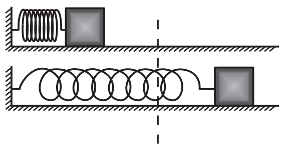
De I e II: $20 < P < 30$, pois o gráfico de P é do tipo



Resposta: B

QUESTÃO 24

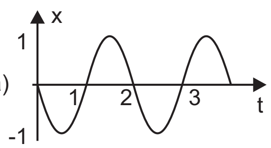
Considere um corpo, preso a uma mola, oscilando em torno da sua posição de equilíbrio O, como na figura abaixo.

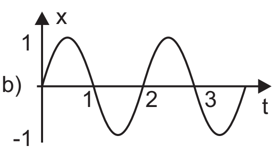


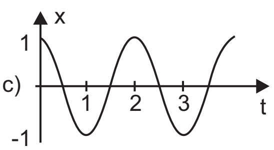
No instante **t**, a posição x = x(t) desse corpo, em relação à sua posição de equilíbrio, é dada pela função

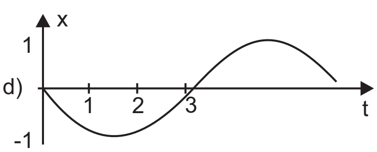
$$x(t) = \cos\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right),\ t \geq 0.$$

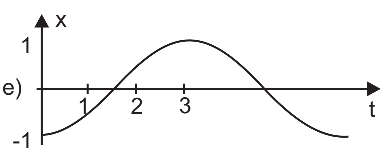
Dessa forma, o gráfico que melhor representa a posição **x** desse corpo, como função do tempo **t**, em relação ao ponto **O**, é:

a) 

b) 

c) 

d) 

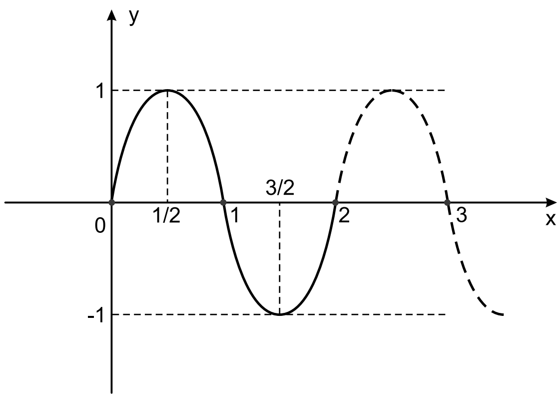
e) 

RESOLUÇÃO

Podem-se atribuir valores a t para obter-se os respectivos valores para a função. Assim:

t	$x = x(t) = \cos\left(\pi \cdot t + \dfrac{3\pi}{2}\right)$
0	$x(0) = \cos\left(\pi \cdot 0 + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$
$\dfrac{1}{2}$	$x\left(\dfrac{1}{2}\right) = \cos\left(\pi \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos(2\pi) = 1$
1	$x(1) = \cos\left(\pi \cdot 1 + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) = 0$
$\dfrac{3}{2}$	$x\left(\dfrac{3}{2}\right) = \cos\left(\pi \cdot \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos(3\pi) = -1$
2	$x(2) = \cos\left(\pi \cdot 2 + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{7\pi}{2}\right) = 0$

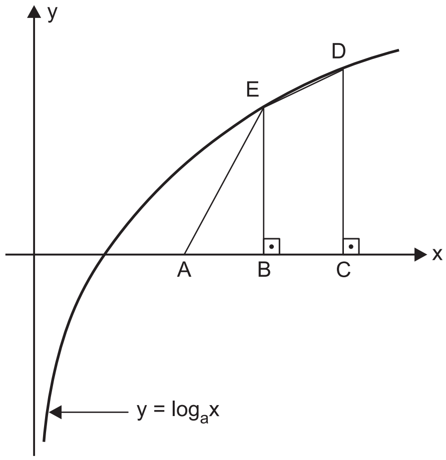
O gráfico da função x(t) é



que está melhor representado na alternativa b.
Resposta: B

QUESTÃO 25

Os pontos D e E pertencem ao gráfico da função $y = \log_a x$, com $a > 1$ (figura abaixo). Suponha que $B = (x;0)$, $C = (x + 1;0)$ e $A = (x - 1;\ 0)$. Então, o valor de x para o qual a área do trapézio BCDE é o triplo da área do triângulo ABE é



a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

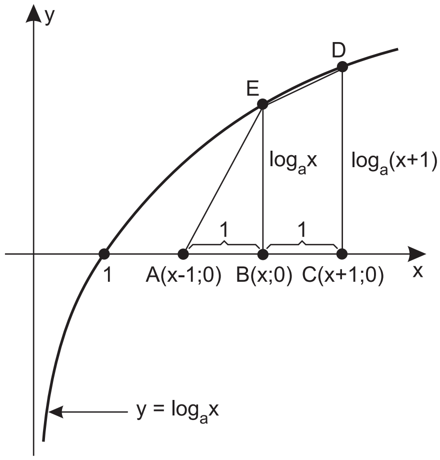
b) $1 + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\dfrac{1}{2} + \sqrt{5}$

d) $1 + \sqrt{5}$

e) $\dfrac{1}{2} + 2\sqrt{5}$

RESOLUÇÃO



$$A_{BCDE} = 3\ A_{ABE} \Rightarrow \frac{\log_a x + \log_a(x+1)}{2} \cdot 1 = 3 \cdot \frac{1 \cdot \log_a x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_a x(x+1) = \log_a x^3 \Leftrightarrow x^2 + x = x^3 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{, pois } x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Observação: Se $x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$**, então**

$x - 1 = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} < 1.$

Assim, o ponto A encontra-se à esquerda do ponto de abscissa 1.
Resposta: A

QUESTÃO 26
Se a soma dos 20 primeiros termos da progressão aritmética (log x, log x^3, …) é 200, o valor de x^4 é
a) 2000
b) 10000
c) 100
d) 1000
e) 3000

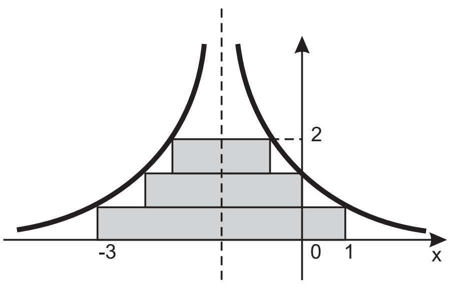
RESOLUÇÃO
A progressão aritmética (log x, log x^3, ...) =
= (log x, 3log x, ...) tem primeiro termo igual a log x, razão igual a 2log x, vigésimo termo
a_{20} = log x + (20 – 1) . 2log x = 39 log x e a soma dos 20 primeiros termos igual a

$$S_{20} = \frac{[\log x + 39 \log x] \cdot 20}{2} = 400 \log x = 200$$

Assim, $\log x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x^4 = (10^{\frac{1}{2}})^4 = 100$

Resposta: C

QUESTÃO 27
– Na figura, temos o gráfico da função de $\mathbb{R} - \{-1\}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{|x+1|}$.
A área da região assinalada vale:



a) $\dfrac{7}{2}$

b) 4

c) $\dfrac{9}{2}$

d) 5

e) $\dfrac{11}{2}$

RESOLUÇÃO

I) A função $f(x) = \dfrac{1}{|x + 1|}$ não está definida para

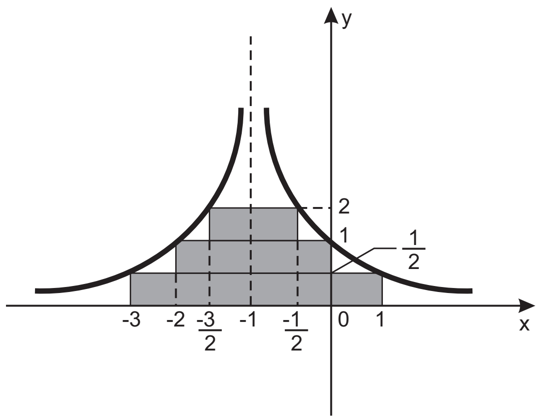
$|x + 1| = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

II) $f(1) = f(-3) = \dfrac{1}{|1 + 1|} = \dfrac{1}{2}$

III) $f(0) = f(-2) = \dfrac{1}{|0 + 1|} = 1$

IV) $f(x) = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{|x + 1|} = 2 \Leftrightarrow |x + 1| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 1 = -\dfrac{1}{2}$ ou $x + 1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$



V) A área da região assinalada corresponde à soma das áreas de 3 retângulos, assim:

$A = [1 - (-3)] \,.\, \dfrac{1}{2} + [0 - (-2)] \cdot \dfrac{1}{2} + \left[-\dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{3}{2}\right)\right] \,.\, 1 =$

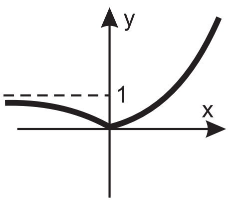
$= 4 \,.\, \dfrac{1}{2} + 2 \,.\, \dfrac{1}{2} + 1 \,.\, 1 = 2 + 1 + 1 = 4$

Resposta: B

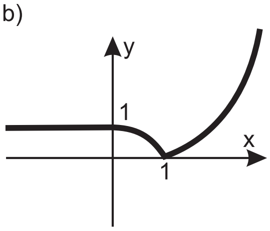
QUESTÃO 28

O gráfico que melhor representa a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |2^x - 2|$ é:

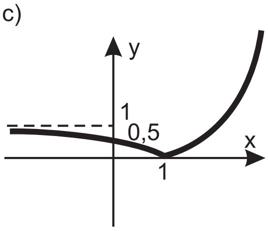
a)



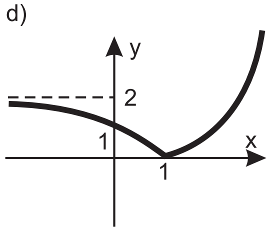
b)



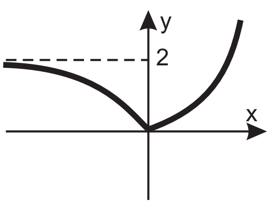
c)



d)

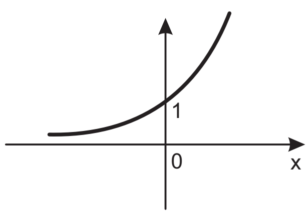


e)

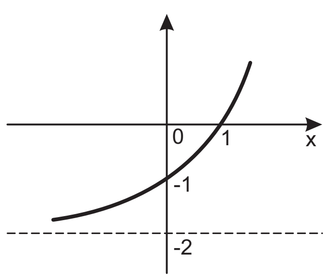


RESOLUÇÃO

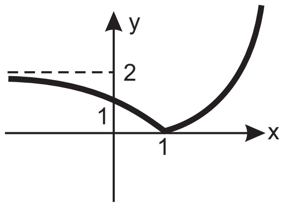
I) O gráfico da função $g(x) = 2^x$ é



II) O gráfico da função $h(x) = 2^x - 2$ é



III) O gráfico da função $f(x) = |2^x - 2|$ é



Resposta: D

QUESTÃO 29

Dada uma P.A. em que $a_p = a$, $a_q = b$, com $q > p$, a_{p+q} vale:

a) $\dfrac{bq - pa}{q - p}$

b) $a + b$

c) $\dfrac{b - a}{q - p}$

d) $\dfrac{bq + pa}{q - p}$

e) $\dfrac{q - p}{b - a}$

RESOLUÇÃO

Na P.A. em que $a_p = a$ e $a_q = b$, com $q > p$, tem-se:

I) $a_q = a_p + (q - p) \cdot r \Rightarrow b = a + (q - p) \cdot r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b - a = (q - p) \cdot r \Leftrightarrow r = \dfrac{b - a}{q - p}$

II) $a_{p+q} = a_q + (p + q - q) \cdot r = b + p \cdot \dfrac{b - a}{q - p} =$

$= \dfrac{b(q - p) + p(b - a)}{q - p} = \dfrac{bq - bp + pb - ap}{q - p} = \dfrac{bq - ap}{q - p}$

Resposta: A

QUESTÃO 30

Numa progressão geométrica de razão inteira $q > 1$, sabe-se que $a_1 \,.\, a_n = 243$, $\log_q a_n = 6$ e $\log_q P_n = 20$, em que a_n é o enésimo termo da progressão geométrica e P_n é o produto dos n primeiros termos.

Então a soma dos n primeiros termos é igual a:

a) $\dfrac{3^9 - 1}{6}$ b) $\dfrac{3^{10} - 1}{6}$ c) $\dfrac{3^8 - 1}{6}$

d) $\dfrac{3^9 - 1}{3}$ e) $\dfrac{3^8 - 1}{3}$

RESOLUÇÃO

I) $\log_q a_n = 6 \Leftrightarrow a_n = q^6$

II) $a_n = q^6 \Leftrightarrow a_1 \,.\, q^{n-1} = q^6 \Leftrightarrow a_1 = \dfrac{q^6}{q^{n-1}} \Leftrightarrow a_1 = q^{7-n}$

III) $\log_q P_n = 20 \Leftrightarrow q^{20} = P_n \Leftrightarrow q^{20} = \sqrt{(a_1 \,.\, a_n)^n} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q^{40} = (a_1 \,.\, a_n)^n \Leftrightarrow q^{40} = 243^n \Leftrightarrow q^{40} = (3^5)^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q^{40} = 3^{5n} \Leftrightarrow q = \sqrt[40]{3^{5n}} \Leftrightarrow q = 3^{\frac{n}{8}}$

IV) $a_1 \,.\, a_n = 243 \Rightarrow q^{7-n} \,.\, q^6 = 3^5 \Leftrightarrow q^{13-n} = 3^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(3^{\frac{n}{8}}\right)^{13-n} = 3^5 \Leftrightarrow 3^{\frac{13n - n^2}{8}} = 3^5 \Leftrightarrow \dfrac{13n - n^2}{8} = 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 - 13n + 40 = 0 \Leftrightarrow n = 5 \text{ ou } n = 8$

V) Para $n = 5 \Rightarrow q = 3^{\frac{n}{8}} = 3^{\frac{5}{8}} \notin \mathbb{Z}$

VI) Para $n = 8 \Rightarrow q = 3^{\frac{n}{8}} = 3^{\frac{8}{8}} = 3$ e $a_1 = q^{7-n} = 3^{7-8} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

VII) $S_n = \dfrac{a_1\,(q^n - 1)}{q - 1} = \dfrac{\frac{1}{3}\,(3^8 - 1)}{3 - 1} = \dfrac{3^8 - 1}{6}$

Resposta: C