Nome: ______________________________ N.º: ________

Endereço: ______________________________ Data: ________

Telefone: ____________ *E-mail:* ______________________________

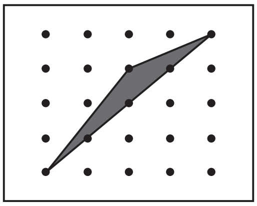
PARA QUEM CURSA O 2.º ANO DO ENSINO MÉDIO EM 2018

Colégio **OBJETIVO**

Disciplina: MATEMÁTICA	Prova: DESAFIO	NOTA:

QUESTÃO 16

Considere o triângulo representado na malha pontilhada com quadrados de lados iguais a 1 cm. A área do triângulo, em centímetros quadrados, é:



a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

RESOLUÇÃO

Considerando o sistema de eixos cartesianos da figura, tem-se A(0; 0), B(2; 3) e C(4; 4). A área S do triângulo ABC é tal que

$$S = \frac{|D|}{2}, \text{ em que}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

Assim, $S = \frac{|-4|}{2} \text{ cm}^2 = 2\text{cm}^2$

Resposta: A

QUESTÃO 17

O lado, a altura e a área de um triângulo equilátero formam, nesta ordem, uma progressão geométrica. O perímetro do triângulo é:

a) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

c) $3\sqrt{3}$

d) $\sqrt{3}$

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

RESOLUÇÃO

Sendo ℓ a medida do lado, $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ a altura e $S = \dfrac{\ell^2.\sqrt{3}}{4}$ a área do triângulo equilátero, tem-se a P.G. $\left(\ell;\ \dfrac{\ell.\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{\ell^2.\sqrt{3}}{4}\right)$, então:

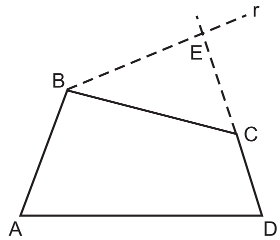
$$\left(\frac{\ell.\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \ell\ .\ \frac{\ell^2.\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{\ell^2\ .\ 3}{4} = \frac{\ell^3.\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 = \ell\sqrt{3} \Leftrightarrow \ell = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Assim, o perímetro do triângulo é $3\ .\ \ell = 3\ .\ \sqrt{3}$
Resposta: C

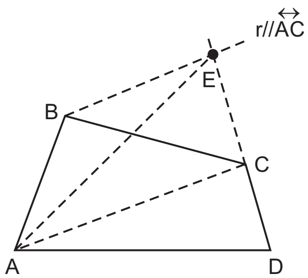
QUESTÃO 18

Na figura abaixo, a reta **r** é paralela ao segmento AC, sendo **E** o ponto de intersecção de **r** com a reta determinada por **D** e **C**. Se as áreas dos triângulos ACE e ADC são 4 e 10, respectivamente, e a área do quadrilátero ABED é 21, então a área do triângulo BCE é:



a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

RESOLUÇÃO



Sendo $S_{ACE} = 4$, $S_{ADC} = 10$ e $S_{ABED} = 21$ tem-se
$S_{BCE} = S_{ABED} - S_{ADC} - S_{ABC} = 21 - 10 - 4 = 7$, pois se
$r \,//\, \overleftrightarrow{AC}$, então $S_{ABC} = S_{ACE} = 4$
Resposta: B

QUESTÃO 19

O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO, que não apresentam as cinco vogais juntas, é:

a) 12
b) (8!)(5!)
c) 12! – (8!) (5!)
d) 12! – 8!
e) 12! – (7!)(5!)

RESOLUÇÃO

VESTIBULANDO tem 12 letras distintas e portanto
$P_{12} = 12!$ anagramas.
As vogais aparecem juntas em $P_8 \, . \, P_5 = (8!) \, . \, (5!)$ anagramas

$\boxed{\text{E I U A O}}$ V S T B L N D

Logo, existem 12! – (8!) (5!) anagramas nos quais as vogais não estão todas juntas.
Resposta: C

QUESTÃO 20

Uma sala tem 10 portas. Calcular o número de maneiras diferentes pelas quais essa sala pode ser aberta.

a) $\dfrac{10!}{5!}$
b) 500
c) 10
d) 10!
e) $2^{10} - 1$

RESOLUÇÃO

Para que a sala de 10 portas seja aberta, deve-se abrir *pelo menos* uma porta. O número de maneiras diferentes de abrir uma única porta é $C_{10,1}$, de abrir duas portas é $C_{10,2}$; de abrir 3 portas é $C_{10,3}$, e assim sucessivamente. Portanto, o total de maneiras é dado por $C_{10,1} + C_{10,2} + C_{10,3} + \ldots + C_{10,10} =$

$$= \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \ldots + \binom{10}{10} =$$

$$= 2^{10} - \binom{10}{0} = 2^{10} - 1$$

Resposta: E

QUESTÃO 21

Em uma reunião, há 12 rapazes, 4 dos quais usam óculos, e 16 garotas, 6 das quais usam óculos. De quantos modos possíveis podem ser formados casais para dançar se quem usa óculos só deve formar par com que não os usa?

a) 192
b) 104
c) 96
d) 88
e) 76

RESOLUÇÃO

Pelo enunciado temos a seguinte distribuição:

	Rapazes	**Moças**
Usam óculos	**4**	**6**
Não usam óculos	**8**	**10**
Total	**12**	**16**

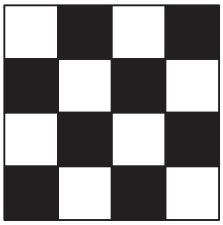
O número de casais em que um usa óculos e outro não é:

4 . 10 + 8 . 6 = 40 + 48 = 88

Resposta: D

QUESTÃO 22

São escolhidas aleatoriamente três das células pretas do tabuleiro representado na figura ao lado. Qual a probabilidade de as três posições escolhidas não estarem alinhadas?



a) $\frac{6}{7}$

b) $\frac{13}{14}$

c) $\frac{25}{28}$

d) $\frac{27}{28}$

e) $\frac{11}{65}$

RESOLUÇÃO

Observe o tabuleiro com as células pretas numeradas de 1 a 8:

	5		**1**
6		**2**	
	3		**7**
4		**8**	

I) O número de maneiras de escolher 3 das 8 células pretas é

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8 \,.\, 7 \,.\, 6}{3 \,.\, 2 \,.\, 1} = 56$$

II) Das 56 maneiras, existem 6 em que as 3 células estão alinhadas, são elas:
(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4), (5, 2, 7) e (6, 3, 8)

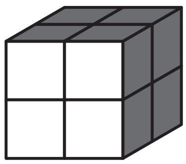
III) A probabilidade de as 3 posições escolhidas não estarem alinhadas é

$$\frac{56 - 6}{56} = \frac{50}{56} = \frac{25}{28}$$

Resposta: C

QUESTÃO 23

Um cubo de 2 cm de aresta tem duas faces adjacentes pintadas de cinza e as demais são pintadas de branco. O seu interior também é branco. Esse cubo é, então, dividido em 8 cubinhos de 1 cm de aresta, como mostra a figura abaixo. Se um desses cubinhos for escolhido ao acaso e lançado sobre uma mesa, a probabilidade de que a face voltada para cima esteja pintada de cinza é:



a) 1/3
b) 1/2
c) 1/12
d) 1/4
e) 1/6

RESOLUÇÃO

Observe que, dos 8 cubinhos, tem-se:
a) 2 do tipo I, com 2 faces cinza e 4 brancas;
b) 4 do tipo II, com 1 face cinza e 5 brancas e
c) 2 do tipo III, com as 6 faces brancas.
Para obter uma face cinza, pode-se sortear um cubo do tipo I e obter face cinza ao lançá-lo, ou sortear um cubo do tipo II e obter face cinza ao lançá-lo. Assim, a probabilidade pedida é

$$\frac{2}{8} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Resposta: E

QUESTÃO 24

Uma urna contém todas as cartelas, do tipo da figura I, totalmente preenchidas com os algarismos 1, 2, 3 e 4, de forma que cada linha (horizontal) contempla todos os quatro algarismos.

Figura I

Figura II

1		3	
	2		
			1
	1		

A probabilidade de se retirar dessa urna, aleatoriamente, uma cartela contemplando a configuração da figura II, com a exigência adicional de que cada coluna (vertical) e cada um dos subquadrados destacados contenham todos os algarismos (1, 2, 3 e 4) é:

a) $\dfrac{1}{12.4!\ 4!\ 4!}$

b) $\dfrac{1}{16.4!\ 4!\ 4!}$

c) $\dfrac{1}{18.4!\ 4!\ 4!}$

d) $\dfrac{1}{20.4!\ 4!\ 4!}$

e) $\dfrac{1}{4!\ 4!\ 4!\ 4!}$

RESOLUÇÃO

Para cada uma das linhas da figura I existem P_4 possibilidades. Para as quatro linhas existem $P_4 \,.\, P_4 \,.\, P_4 \,.\, P_4$ possibilidades. Observe que nesse total não se respeitou qualquer condição de coluna ou subquadrados.

Respeitando as condições das colunas e dos subquadrados contemplarem os quatro algarismos, o quadrado da figura II pode ser preenchido de P_2 formas diferentes, pois com os números dados todos os algarismos apresentados na figura abaixo estão fixados.:

1	**4**	**3**	**2**
3	**2**	**1**	**4**
	3		**1**
	1		**3**

Desta forma, a probabilidade é

$$\frac{P_2}{P_4.P_4.P_4.P_4} = \frac{2!}{4!.4!.4!.4!} = \frac{1}{12.4!.4!.4!}$$

Resposta: A

QUESTÃO 25

O preço de um objeto, em reais, é escolhido, aleatoriamente, entre os elementos do conjunto

{13,00; 13,01; 13,02; 13,03; ...; 43,99}.

A probabilidade de que o preço de tal objeto seja **x** reais e **x** centavos é:

a) 0,6%
b) 1%
c) 1,6%
d) 3,2%
e) 31%

RESOLUÇÃO

I) No conjunto de preços {13,00; 13,01; 13,02; ...; 43,99}, existem 4399 – 1299 = 3100 elementos.

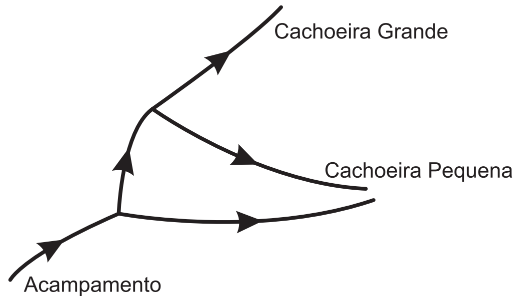
II) Os preços do tipo x reais e x centavos formam o conjunto {13,13; 14,14; 15,15; ...; 43,43}, num total de 43 – 12 = 31 elementos.

III) A probabilidade pedida é $\frac{31}{3100} = \frac{1}{100} = 1\%$

Resposta: B

QUESTÃO 26

Dois jovens partiram, do acampamento em que estavam, em direção à Cachoeira Grande e à Cachoeira Pequena, localizadas na região, seguindo a trilha indicada neste esquema:



Em cada bifurcação encontrada na trilha, eles escolhiam, com igual probabilidade, qualquer um dos caminhos e seguiam adiante. Então, é correto afirmar que a probabilidade de eles chegarem à Cachoeira Pequena é

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{3}$

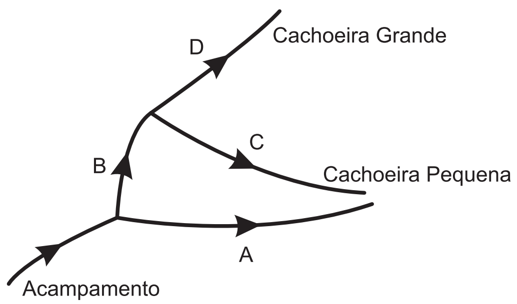
c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{5}{6}$

e) $\frac{6}{7}$

RESOLUÇÃO

Observando os caminhos no esquema a seguir, tem-se:



Para chegar à Cachoeira Pequena existem dois caminhos possíveis:

I) Na 1ª bifurcação, seguir o caminho A, cuja probabilidade é $\frac{1}{2}$

II) Na 1ª bifurcação, seguir o caminho B e, na 2ª bifurcação, seguir o caminho C, cuja probabilidade é $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Assim, a probabilidade pedida é $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Resposta: C

QUESTÃO 27

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

e seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \det A$. Então $f(-1)$ é:

a) – 3

b) 3

c) – 9

d) 7

e) – 7

RESOLUÇÃO

I) $f(x) = \det A = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} =$

$= x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} =$

$= x \cdot 1 \cdot x \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 8 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = x \cdot 1 \cdot x \cdot 1 \cdot (x^3 + 8) = x^2 \cdot (x^3 + 8)$

II) $f(x) = x^2 \cdot (x^3 + 8) \Rightarrow f(-1) = (-1)^2 \cdot [(-1)^3 + 8] = 1 \cdot (-1 + 8) = 7$

Resposta: D

QUESTÃO 28

Sejam **A**, **B**, **C** matrizes reais 3x3, satisfazendo as seguintes relações: A . B = C e B = 2 . A. Se o determinante de **C** é 32, o valor do módulo do determinante de **A** é:

a) 2
b) 1/8
c) 16
d) 8
e) 4

RESOLUÇÃO

Se A, B e C são matrizes quadradas de ordem 3 com det C = 32, então:

I) $B = 2 \,.\, A \Rightarrow \det B = \det(2 \,.\, A) = 2^3 \,.\, \det A = 8 \,.\, \det A$

II) $A \,.\, B = C \Rightarrow \det(A \,.\, B) = \det C \Rightarrow \det A \,.\, \det B = 32 \Rightarrow$
$\Rightarrow \det A \,.\, 8 \,.\, \det A = 32 \Rightarrow (\det A)^2 = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \det A = \pm 2 \Rightarrow |\det A| = 2$

Resposta: A

QUESTÃO 29

Uma pessoa quer distribuir, entre seus amigos, um determinado número de convites. Se der 2 convites a cada amigo, sobrarão 25 convites; entretanto, se pretender dar 3 convites a cada amigo, faltarão 15 convites. Caso essa pessoa pretenda dar 4 convites a cada amigo, ela precisará ter mais:

a) 45 convites.
b) 55 convites.
c) 40 convites.
d) 80 convites.
e) 70 convites.

RESOLUÇÃO

Sendo a o número de amigos e C o número de convites, nas condições propostas, tem-se:

$$\begin{cases} C = 2a + 25 \\ C = 3a - 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2a + 25 \\ 3a - 15 = 2a + 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = 2a + 25 \\ a = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 105 \\ a = 40 \end{cases}$$

Se a pessoa pretende dar quatro convites a cada amigo, necessitará de 4 . 40 = 160 convites e, portanto, precisará ter mais 160 – 105 = 55 convites.

Resposta: B

QUESTÃO 30

Considere o sistema de equações $\begin{cases} x - y = 2 \\ cx + y = 3 \end{cases}$, em que **c** é uma constante real. Para que a solução do sistema seja um par ordenado no interior do primeiro quadrante ($x > 0$, $y > 0$) do sistema de eixos cartesianos ortogonais com origem (0; 0), é necessário e suficiente que

a) $c \neq -1$

b) $c < -1$

c) $c < -1$ ou $c > 3/2$

d) $3/2 < c$

e) $-1 < c < 3/2$

RESOLUÇÃO

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ cx + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ (c + 1)x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{c + 1} \\ y = \dfrac{3 - 2c}{c + 1} \end{cases}$$

1) Se $x = \dfrac{5}{c + 1} > 0$, então $c + 1 > 0 \Leftrightarrow c > -1$

2) Se $y = \dfrac{3 - 2c}{c + 1} > 0$, então $3 - 2c > 0$, pois $c > -1$

Logo, $c < \dfrac{3}{2}$

De (1) e (2), concluímos que $-1 < c < \dfrac{3}{2}$

Resposta: E